Лекция 15.

Основное состояние и возбуждение магнонов. Спиновые волны в ферромагнетиках

$$\widehat{\vec{s}_n}\widehat{\vec{s}_m} = \underbrace{\left(\hat{s}_n^x \cdot \hat{s}_m^x + \hat{s}_n^y \cdot \hat{s}_m^y\right)}_{?} + \underline{\hat{s}_n^z \cdot \hat{s}_m^z}$$

$$\hat{s}^{\pm} = \hat{s}^x \pm i\hat{s}^y \rightarrow \hat{s}^+ \Psi_{s_z} = (..+..)\Psi_{s_z+1}$$

$$\hat{s}^- \Psi_{s_z} = (..-..)\Psi_{s_z-1}$$

Оператор $\hat{s}$ описывает рождение спиновой волны

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{s}^+ \Psi_{+s} = 0 \\ \hat{s}^- \Psi_{-s} \equiv 0 \end{array}\right\}$$ дополнительное ограничение, связанное со структурой спинового момента

$$\hat{s}^x = \frac{1}{2}\left(\hat{s}^+ + \hat{s}^-\right)$$

$$\hat{s}^y = \frac{1}{2}\left(\hat{s}^+ - \hat{s}^-\right)$$

$$s_n^x s_m^x + s_n^y s_m^y = \frac{1}{4}\left\{\left(\hat{s}_n^+ + \hat{s}_n^-\right)\left(\hat{s}_m^+ + \hat{s}_m^-\right) - \left(\hat{s}_n^+ - \hat{s}_n^-\right)\left(\hat{s}_m^+ - \hat{s}_m^-\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\cancel{\hat{s}_n^+ \hat{s}_m^+} + \hat{s}_n^- \hat{s}_m^+ + \hat{s}_n^+ \hat{s}_m^- + \cancel{\hat{s}_n^- \hat{s}_m^-} - \cancel{\hat{s}_n^+ \hat{s}_m^+} + \hat{s}_n^+ \hat{s}_m^- + \hat{s}_n^- \hat{s}_m^+ - \cancel{\hat{s}_n^- \hat{s}_m^-}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\hat{s}_n^+ \hat{s}_m^-}_{} + \hat{s}_n^- \hat{s}_m^+\right\} \to \sum_{n \neq m} J\left(\left|\vec{n} - \vec{m}\right|\right)\hat{s}_n^+ \hat{s}_m^- ==$$

подставим в исх. гамильтониан

$$n \rightleftarrows m$$

$$== \sum_{n \neq m} J\left(\left|\vec{m} - \vec{n}\right|\right)\hat{s}_m^+ \hat{s}_n^- = \sum_{n \neq m} J_{nm} \hat{s}_n^- \hat{s}_m^+$$

$$\sum_{n \neq m} J_{nm}(\hat{s}_n^x \hat{s}_m^x + \hat{s}_n^y \hat{s}_m^y) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{n \neq m} J_{nm} \hat{s}_n^- \hat{s}_m^+$$

в результате гамильтониан системы

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{n \neq m} J_{nm}(\hat{s}_n^- \hat{s}_m^+ + \hat{s}_n^z \hat{s}_m^z) - g\mu_Б H \sum_n \hat{s}_n^z$$

здесь все операторы действуют на волновую функцию изменить суммарную проекцию спина на OZ нельзя

Изменение можно внести только внешним воздействием.

$$\boxed{\hat{s}_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \hat{s}_{\vec{g}}^{\pm} e^{\pm i\vec{q}\vec{n}}}$$

$$\{n\} = N$$

$$\{\vec{q}\} = N$$

$$-\frac{\pi}{a\alpha} < q_{\alpha} < \frac{\pi}{a\alpha}; q_{\alpha} = \frac{2\pi}{a\alpha} \cdot \frac{P_{\alpha}}{N_{\alpha}} \rightarrow$$

$$\hat{s}_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \hat{s}_{\vec{g}}^{\pm} e^{\pm i\vec{q}\vec{n}}$$

$$\left[\hat{s}_q^{-}, \hat{s}_{q_1}^{+}\right] = \frac{1}{N} \sum_n \sum_m e^{i\vec{q}\vec{n}} e^{i\vec{q}_1\vec{m}} \left[\hat{s}_n^{-}, \hat{s}_m^{+}\right]$$

$$\frac{N_{\alpha}}{2} < P_{\alpha} \le \frac{N_{\alpha}}{2}$$

в виде сумм

$$\left[\left(\hat{s}_n^x - i\hat{s}_n^y\right), \left(\hat{s}_m^x + i\hat{s}_m^y\right)\right] = \left\{ \left[\cancel{\hat{s}_n^x \hat{s}_m^x}\right] - i\left[\overbrace{\hat{s}_n^y \hat{s}_m^y}^{\delta_{nm}}\right] + i\left[\overbrace{\hat{s}_n^x \hat{s}_m^y}^{\delta_{nm}}\right] - \left[\cancel{\hat{s}_n^y \hat{s}_m^y}\right] \right\} =$$

$$\downarrow 0 \qquad\qquad \downarrow 0$$

$$-\delta_{nm} i\left[\hat{s}_n^y, \hat{s}_n^x\right] + \delta_{nm} i\left[\hat{s}_n^x, \hat{s}_n^y\right]$$

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = +1$$

$$\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$$

$$\left[\hat{s}^{\alpha}, \hat{s}^{\beta}\right] = i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\hat{s}^{\gamma}$$

$$= -i\delta_{nm}\left\{-i\underbrace{\varepsilon^{yxz}}_{-1}\hat{s}_n^z + i\underbrace{\varepsilon^{xyz}}_{+1}\hat{s}_n^z\right\} = -2\delta_{nm}\hat{s}_n^z$$

$$\left[\hat{s}_q^-, \hat{s}_{q_1}^+\right] = -\frac{1}{N}\sum_n\sum_m e^{i\vec{q}\vec{n}}e^{-i\vec{q}_1\vec{m}}\delta_{nm}2\hat{s}_n^z =$$

$$= \frac{-2}{N}\sum_n e^{i(\vec{q}-\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{s}_n^z \approx \frac{2s}{N}\sum_n e^{i(\vec{q}-\vec{q}_1)\vec{n}} + \left(\underbrace{\sim\cancel{\frac{\Delta N}{N}}}_{\ll 1}\right) \simeq -2s\delta_{\vec{q}\vec{q}_1} \rightarrow$$

если все $s_n^z \equiv +s$

предполагаем, что ΔN узлов $\rightarrow s_n^z = (s-1)$

$\dfrac{\Delta N}{N} \ll 1$ отклонение системы от основного состояния ничтожно

$$\sum_n e^{i(\vec{q}-\vec{q}_1)\vec{n}} = N\delta_{\vec{q},\vec{q}_1}$$

$\to \hat{s}_q^- = \hat{a}_q^+$ т.е. s^- является оператором рождения , s^+ - оператором уничтожения

$$\left[\hat{a}_{\vec{q}}^+, \hat{a}_{\vec{q}_1}\right] \simeq -\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}$$

$$\left[\frac{\hat{s}_{q1}^+}{\sqrt{2s}}, \frac{\hat{s}_q^-}{\sqrt{2s}}\right] = \delta_{\vec{q}\vec{q}_1} \infty \left[\hat{a}_{q_1}, \hat{a}_q^+\right] = \delta_{\vec{q}\vec{q}_1}$$

первый «кусок» гамильтониана:

$$\sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}} \hat{s}_{\vec{q}}^- e^{-i\vec{q}\vec{n}}\right)}_{\hat{s}_n^-} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}_1} \hat{s}_{\vec{q}_1}^+ e^{-i\vec{q}_1\vec{m}}\right)}_{\hat{s}_m^+} =$$

$$\hat{s}_{\vec{q}}^- = \sqrt{2s}\,\hat{a}_{\vec{q}}^+ \qquad \hat{s}_{\vec{q}_1}^+ = \sqrt{2s}\,\hat{a}_{\vec{q}_1}^-$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}\left(\sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right) e^{-i\vec{q}\vec{n}+i\vec{q}_1\vec{m}}\right) 2s\,\hat{a}_q^+ \hat{a}_{q_1}^- = \sum_{n\neq m} I_{nm}\,\hat{s}_n^- \hat{s}_m^+$$

$$=\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I\left(\left|\vec{l}\right|\right)e^{-i\vec{q}\vec{l}}\right)\left(\underbrace{\sum_{m} e^{i\left(\vec{q}_1-\vec{q}\right)}}_{N\delta_{\vec{q}_1\vec{q}}}\right)$$

заменили индекс суммирования

сумма двойная и по $\vec{n}$ и по $\vec{m}$

$$\vec{n}-\vec{m}=\vec{l}$$

$$1)\sum_{n\neq m} I_{nm}\hat{s}_n^{-}\hat{s}_m^{+}=\frac{2s}{\cancel{N}}\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)e^{-i\vec{q}\vec{l}}\right)\underbrace{\hat{a}_q^{+}\hat{a}_q}_{\hat{N}_q}\cancel{N}$$

следующие слагаемые в $\hat{H}$ зависят от $\hat{s}_n^z,\hat{s}_m^z$

$$\hat{s}_n^2=s(s+1)=\left(\hat{s}_n^x\right)^2+\left(\hat{s}_n^y\right)^2+\left(\hat{s}_n^z\right)^2=$$

все спины на всех узлах одинаковы по величине

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\hat{s}_n^{+}+\hat{s}_n^{-}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2i}\left(\hat{s}_n^{+}-\hat{s}_n^{-}\right)\right)^2+\left(\hat{s}_n^z\right)^2$$

$$\left(\hat{s}_n^x\right)^2+\left(\hat{s}_n^y\right)^2=\frac{1}{4}\left\{\cancel{\left(\hat{s}_n^+\right)^2}+\hat{s}_n^+\hat{s}_n^-+\hat{s}_n^-\hat{s}_n^++\cancel{\left(\hat{s}_n^-\right)^2}-\cancel{\left(\hat{s}_n^+\right)^2}+\hat{s}_n^+\hat{s}_n^-+\hat{s}_n^-\hat{s}_n^+-\cancel{\left(\hat{s}_n^-\right)^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\hat{s}_n^+\hat{s}_n^-+\hat{s}_n^-\hat{s}_n^+\right\}=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i\vec{q}\vec{n}-i\vec{q}_1\vec{n}}\,\cancel{2}S\left\{\underbrace{\hat{a}_q\hat{a}_{q1}^+}_{\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}}+\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q\right\}=$$

$$=\frac{S}{N}\left\{\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i\vec{q}\vec{n}-i\vec{q}_1\vec{n}}\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}+2\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i\vec{q}\vec{n}-i\vec{q}_1\vec{n}}\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q\right\}=$$

$$=\frac{S}{N}\left\{\underbrace{\sum_{q}1}_{N}+2\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i(\vec{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q\right\}=S+\frac{2S}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i(\overline{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q$$

$$\left(\hat{s}_n^z\right)^2=s(s+1)-\left(\hat{s}_n^x\right)^2-\left(\hat{s}_n^y\right)^2=s^2+\cancel{s}-\cancel{s}-\frac{2S}{N}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{q}_1}e^{i(\overline{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q$$

$$\hat{s}_n^z=\sqrt{\left(\hat{s}_n^z\right)^2}=s\sqrt{1-\frac{2S}{N}\underbrace{\sum_{\vec{q},\vec{q}_1}e^{i(\overline{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}_{q1}^+\hat{a}_q}_{\sim\Delta N}}\approx$$

т.к. суммируются операторов a^+a
(мера наличия волн)

т.к. суммируются операторов $a^{+}a$

(мера наличия волн)

таким образом, второе слагаемое $\sim \dfrac{\Delta N}{N}$; $\quad \sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2}$

$x \ll 1$

$$\approx \boxed{s - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q},\vec{q}_1} e^{i(\vec{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}^{+}_{q1}\hat{a}_q \approx \hat{s}^{z}_{n}}$$

т.е. проекция $\hat{s}^{z}_{n}$ на $\forall$ узле отличается от max значения S на долю собственных волн

2)

$$\sum_n \hat{s}^{z}_{n} = \underbrace{\left(\sum_n S\right)}_{NS} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q},\vec{q}_1}\underbrace{\left(\sum_n e^{i(\vec{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\right)}_{N\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}}\hat{a}^{+}_{q1}\hat{a}_q =$$

$$= NS - \sum_{\vec{q}}\hat{a}^{+}_{q1}\hat{a}_q = NS - \sum_{\vec{q}}\widehat{N}_q$$

максимальный спин равен NS и он уменьшен на количество спиновых волн

3)

$$\sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right)\hat{s}_n^z \hat{s}_m^z = \sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right)\left\{S-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q},\vec{q}_1} e^{i(\vec{q}-i\vec{q}_1)\vec{n}}\hat{a}^+_{q1}\hat{a}_q\right\}\left\{S-\frac{1}{N}\sum_{\vec{q},\vec{q}_1} e^{i(\vec{q}-i\vec{q}_1)\vec{m}}\hat{a}^+_{q1}\hat{a}\right.$$

при раскрытии скобок оставляем только первые неисчезающие члены $\sim \dfrac{\Delta N}{N}$

$$\approx S^2 \underbrace{\left(\sum_{n\neq m} I\left(\overbrace{\left|\vec{n}-\vec{m}\right|}^{\vec{l}}\right)\right)}_{\underbrace{\sum_n \sum_{l\neq 0} I(l)=}_{=N\sum_{l\neq 0} I(l)}} - \frac{S}{N}\sum_{\vec{q}\vec{q}_1}\left\{\sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right)\left[e^{i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{n}} + e^{i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{m}}\right]\right\}\hat{a}^+_{q_1}\hat{a}_q + 0\left(\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2\right)$$

$$= S^2 N\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) - \frac{S}{\cancel{N}}\sum_{\vec{q}\vec{q}_1} 2\cancel{N}\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)\hat{a}^+_{\vec{q}_1}\hat{a}_{\vec{q}} ==$$

$$\sum_{n\neq m} I\left(\left|\vec{n}-\vec{m}\right|\right)e^{i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{n}}e^{-i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{m}+i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{m}} = \left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)e^{i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)l}\right)\left(\underbrace{\sum_m e^{i\left(\vec{q}-\vec{q}_1\right)\vec{m}}}_{N\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}}\right) = N\delta_{\vec{q}\vec{q}_1}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)$$

$$= S^2N\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) - 2S\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)\hat{a}^{+}_{\vec{q}}\hat{a}_{\vec{q}} = S^2N\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) - 2S\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)\widehat{N}_{\vec{q}}$$

В результате получаем гамильтониан:

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\neq\vec{m}} I\left(\vec{n}-\vec{m}\right)\left(\hat{s}^{-}_{n}\hat{s}^{+}_{m} + \hat{s}^{z}_{n}\hat{s}^{z}_{m}\right) - g\mu_{Б}\mathrm{H}\sum_{n}\hat{s}^{z}_{n} \simeq$$

$$\simeq -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}S\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)e^{-i\vec{q}\vec{l}}\right)\widehat{N}_{\vec{q}} - \frac{S^2N}{2}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) + \frac{\cancel{2}S}{\cancel{2}}\sum_{\vec{q}}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)\widehat{N}_{\vec{q}} - g\mu_{Б}\mathrm{H}SN + g\mu_{Б}\mathrm{H}$$

$$\widehat{H} \simeq \left\{-\frac{S^2N}{2}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) - g\mu_{Б}HSN\right\} + \sum_{\vec{q}}\left\{\left(S\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right)\left(1-e^{-i\vec{q}\vec{l}}\right) + g\mu_{Б}H\right\}\widehat{N}_{\vec{q}}$$

<u>Утверждение</u> $\widehat{H} \equiv E_0 + \Delta E$ может быть записано так, где

$$\boxed{E_0 \equiv -\frac{S^2N}{2}\left(\sum_{\vec{l}\neq 0} I(l)\right) - g\mu_{Б}HSN}$$

энергия основного состояния, все спины $\uparrow\uparrow$

$$E_0 \equiv \left\langle 0 \middle| \widehat{H} \middle| 0 \right\rangle$$

$$\boxed{\Delta \widehat{E} \equiv \sum_{\vec{q}} \varepsilon\left(\vec{q}\right) \widehat{N}_q}$$

результат появления спиновых волн

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S_n^z = \pm S \quad (!)$$

$$\varepsilon(\vec{q}) = S \sum_{\vec{l} \neq 0} I(l) \left(1 - e^{-i\vec{q}\vec{l}}\right) + g\mu_Б H$$

Каждый магнон несет энергию $\varepsilon\left(\vec{q}\right)$; фактически мы получили закон дисперсии.

Длинноволновое приближение:

$$\varepsilon\left(\vec{q} \sim 0\right) \approx S \sum_{\vec{l} \neq 0} I(l) \left(\cancel{1} - \cancel{1} + i\vec{q}\vec{l} + \frac{1}{2}\left(\vec{q}\vec{l}\right)^2 + \ldots\right) + g\mu_Б H \approx Si\vec{q} \underbrace{\left(\sum_{\vec{l} \neq 0} I(l)\vec{l}\right)}_{0} + \frac{S}{2} \sum_{\vec{l} \neq 0} I(l) \left(\vec{q}\vec{l}\right)^2 - \ldots$$

т.к. сумма по всем $\vec{l}$, и всегда на каждое $\vec{l}$ найдется - $\vec{l}$

$$\varepsilon\left(\vec{q} \sim 0\right) \approx \frac{S}{2} q^\alpha q^\beta \underbrace{\left(\sum_l I(l) l^\alpha l^\beta\right)}_{I\delta^{\alpha\beta}} + g\mu_Б H$$

$$\varepsilon\left(\vec{q}\sim 0\right)\approx\frac{S}{2}q^{\alpha}q^{\beta}\underbrace{\left(\sum_{l}I(l)l^{\alpha}l^{\beta}\right)}_{I\delta^{\alpha\beta}}+g\mu_{Б}H$$

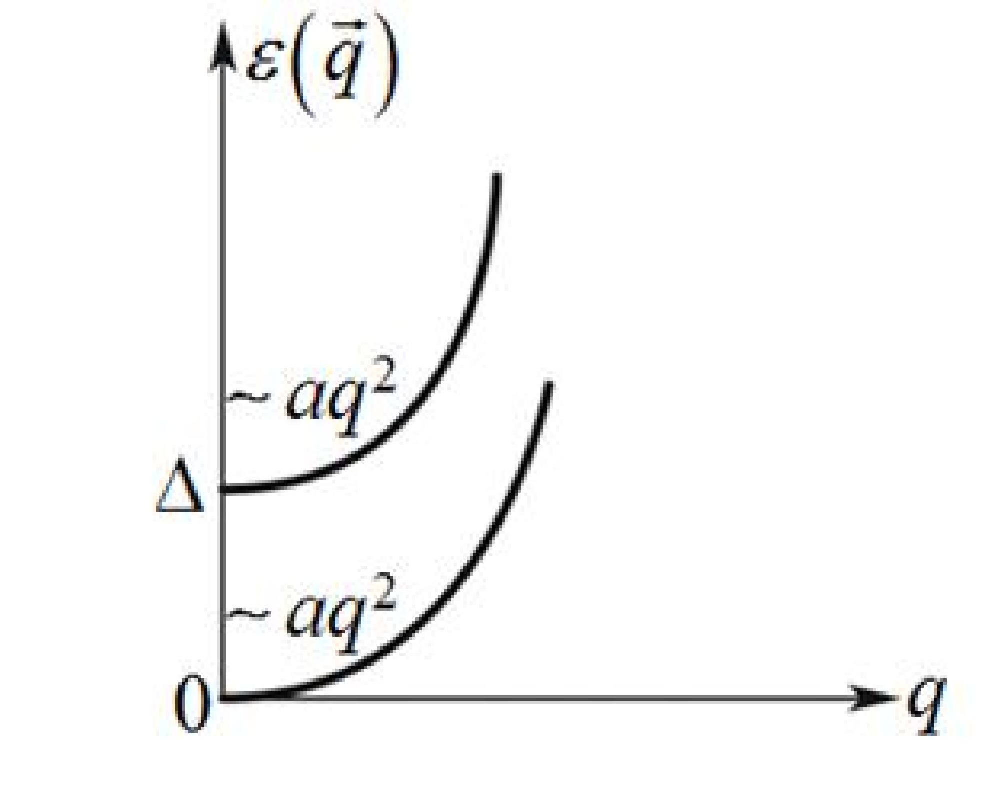
свертка

$$I\cdot 3=\sum_{l}I(l)\cdot l^{2};(\alpha=\beta)$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\sum_{l}I(l)\cdot l^{2}$$

$$\boxed{\varepsilon\left(\vec{q}\sim 0\right)=\underbrace{\frac{S}{6}\left(\sum_{l}I(l)l^{2}\right)}_{a}q^{2}+\underbrace{g\mu_{Б}H}_{\Delta}}$$

длинноволновое приближение для энергии отдельного магнона



$\Delta = 0$, если магнитное поле не включено $\varepsilon\left(\vec{q} \sim 0\right) = aq^2 + \Delta$.

Ни одного отклика на воздействие энергией $< \Delta$ система не даст, зато начиная с Δ будут появляться спиновые волны.